

Artur Bălăucă

Adrian Boțan

Cătălin Budeanu

Ioan Ciobanașu

Gabriel Mîrșanu

Bogdan Maxim

Dumitru Poroșniuc

18

**EDIȚII ALE CONCURSULUI
INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU“**

BOTOȘANI

(2001 – 2018)

CLASELE III - XI

466 de probleme



Editura TAIDA

– IAȘI –

Societatea de Științe Matematice – Filiala Botoșani

© Editura TAIDA

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
18 ediții ale Concursului interjudețean de matematică „Dimitrie
Pompeiu” Botoșani (2001-2018) : clasele III - XI : 430 de probleme /
Artur Bălăucă, Adrian Boțan, Cătălin Budeanu, Ioan Ciobanașu, Gabriel
Mîrșanu, Bogdan Maxim, Dumitru Poroșniuc - Iași:
Editura Taida, 2019

ISBN: 978-606-514-482-8

51

*Conștienți că decizia cu privire la utilitatea lucrării aparține în
primul rând principalilor ei utilizatori – elevii și profesorii lor –
vom considera binevenite orice observații și sugestii la adresa:*

BĂLĂUCĂ ARTUR

E-mail: arturbalauca@editurataida.ro

Telefon: 0745.512535



Dă-ne Like pe facebook

www.facebook.com/EDITURA-TAIDA

Pentru comenzi vă rugăm să vă adresați EDITURII TAIDA



Str. Aeroportului, nr. 2B



0232 270 250; 0232 270 260



www.editurataida.ro; www.eduzone.ro; www.mimio.ro

Tipărit la:

TipoTaida
tipar digital / offset

0232 270 250 / 0232 270 260

www.editurataida.ro

office@editurataida.ro

Introducere

Nordul Moldovei, inclusiv Botoșaniul, a dat României o pleiadă însemnată de intelectuali de mare valoare, inclusiv matematicieni, standarde ale culturii românești. Dintre matematicieni, probabil că cel mai important este Dimitrie Pompeiu.

Era, astfel, natural, ca tinerii elevi talentați și iubitori de matematică, să se bucure de un concurs, al cărui nume să fie legat de extraordinarul Pompeiu, cel mai citat matematician român până azi, îndeobște prin celebra conjectură zămislită în 1929.

Prin dragostea pentru matematica școlară, a regretatului profesor de geometrie de la Universitatea din Iași, Dan Brânzei, intelectual de excepție, cât și prin iubirea de matematică și probleme pentru cei mici, a unui celebru dascăl botoșănean, Artur Bălăucă, acum cincisprezece ani s-a născut acest concurs.

Sunt în România competiții de matematică cu zecile, unele remarcabile, altele mai îndoielnice. Concursul Dimitrie Pompeiu are, însă, o patină aparte: problemele fac în primul rând apel la intuiție și imaginație, în mult mai mare măsură decât la tehnici de rezolvări de probleme. În plus, faptul că în ultimii ani participă și copii din clasele primare, iar problemele pentru aceștia sunt extrem de aplicate spre gândirea liberă și corectă, aduce o noutate în peisajul educației prin competiții școlare.

Am venit la Botoșani, la concurs, cu mare plăcere în ultimii ani. Îl consider un festival al bucuriei matematice și al reîntâlnirii cu dragii colegi moldoveni, mulți dintre ei, printre autorii acestei cărți.

Am remarcat de fiecare dată aplecarea autorităților botoșănene spre a asigura desfășurarea concursului în condițiile cele mai bune, pentru copii: de la Consiliul Județean, Primărie și până la Inspectoratul Școlar Județean.

Această carte este o colecție de bijuterii matematice, în mare parte cizelate de către dascălii din zonă. Minunat!

Radu Gologan

ARGUMENT

„Nu adevăru-i rostul
Ci drumul tău spre el.“

(Dan Brânzei – Caut)

Am apucat o vreme când se înscăunase dinspre Răsărit o vorbă de fală: **Noi muncim, nu gândim!** Mă tem că o să apuc alte vorbe falnice dinspre Apus: **Noi câștigăm, nu gândim!** Să fie pe la casele lor gândurile astea! Unii aveau puterea, alții au banul (ceea ce e cam același lucru), noi ne mai apărăm (câteodată) *sărăcia și nevoile și neamul.*

Avem copii sănătoși, cuminți și deștepți. Mai bântuie pe la unii gândul că or trece ca gășca prin apă și or ajunge la câinii cu colaci în coadă. Chiar dacă or fi acuma mulți de aceștia, nu ei sunt importanți și nu de dânșii atârnă devenirea noastră.

Cei buni, cu aplecare spre dreapta știință a matematicii, s-au deprins să se tot întâlnească în concursuri: **Noi nu tocim, ci gândim!**

Bănuind că dreptatea este de partea lor, colegii au strâns sclipiri de prin concursuri Botoșănene ce s-au învrednicit de numele matematicianului **Dimitrie Pompeiu**. Poate nu vor fi prea multe pagini să cadă greu peste picioare, dar este aici pildă și judecată care să priiască minților iscoditoare.

Mă bucur că am avut bună ocazie să fiu și eu pe la înfruntările acestea. Răsfoind acuma cartea îmi revin în fața ochilor eroii lor: copii îndârjiți să spargă enigme, să le așeze în cugetare limpede, să binemerite diplome și premii, să închege drepte prietenii. Poate, exemplul lor va îndreptăți strădanii.

Cu respect față de **cei ce gândesc,**

Prof. univ. dr. **Dan Brânzei**



**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN
„DIMITRIE POMPEIU”**

EDIȚIA I – 2 iunie 2001

CLASA a V-a

1. La o împărțire de numere naturale, suma dintre împărțitor, cât și rest este egală cu deîmpărțitul. Să se arate că împărțitorul este egal cu câtul.
2. Să se determine un număr impar de numere naturale consecutive a căror sumă este 2001.
3. Fie numerele naturale a și b astfel încât $a < b$. Să se arate că $a^{n+1} + b^n \leq a^n + b^{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

CLASA a VI-a

4. Fie triunghiul $\triangle ABC$ cu măsurile unghiurilor direct proporționale cu numerele 2, 4 și 6 ($m(\sphericalangle A) > m(\sphericalangle B) > m(\sphericalangle C)$). Dacă M este simetricul vârfului A față de dreapta BC , iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle BMC$ intersectează dreapta AB în N , să se demonstreze că $(AM) \equiv (AN)$ și să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului MNC .

5. a) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$3xy + 2x = 5y + 1.$$

b) Să se arate că pentru orice număr natural nenul n are loc

inegalitatea:
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} \geq \frac{5}{6}.$$

6. Arătați că nu există trei numere naturale prime astfel încât adunându-le două câte două să se obțină sume ce au 2, 3 și, respectiv, 5 divizori naturali.

CLASA a VII – a

7. Să se determine $x \in Z, y, z \in Z^*$ ce verifică relația: $x + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2001$.

8. Să se arate că: a) $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{6}}} \geq \frac{5}{6}$;

b) $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{3}{\sqrt{6+\sqrt{6}}} + \dots + \frac{n+1}{\sqrt{n(n+1)+\sqrt{n(n+1)}}} \geq n, n \in N^*$.

(Niculai Solomon)

9. Fie $ABCD$ un patrulater convex, $M \in (AB), P \in (CD)$ astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{CP}{CD} = k$. Construim $MN \parallel AC, N \in BC$ și $MQ \parallel BD, Q \in AD$.

a) Demonstrați că $MNPQ$ este paralelogram.

b) Aflați valoarea raportului ariilor patrulaterelor $MNPQ$ și $ABCD$ în funcție de k .

c) Aflați k astfel încât raportul ariilor patrulaterelor să aibă valoarea maximă.

CLASA a VIII - a

10. Să se rezolve în \mathbb{R} :

a) $x + [x] = 2x \cdot [x] + \frac{1}{2}$;

b) $x + [x] > x[x]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

11. Fie funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; a < b$;

$$f(x) = m \cdot x + n; m, n \in \mathbb{R}, m \neq 0.$$

a) Arătați că valoarea maximă a funcției f este: $\max(f(a), f(b))$.

b) Dacă $x, y, z, a, b, c \in [0, 1]$, demonstrați inegalitatea:

$$ax + by + cz - abxy - acxz - bcyz - 1 \leq 0.$$

12. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Dacă $BC = 3$ cm, $CD = 3\sqrt{7}$ cm, $BD = 6$ cm și distanța de la punctul A la planul (BDC) este de $\frac{10\sqrt{21}}{7}$ cm. Se cere:

- Arătați că proiecția lui A pe planul (BCD) este ortocentrul triunghiului $\triangle BCD$.
- Determinați măsura unghiului diedru dintre planele (ACD) și (BCD) .
- Să se determine distanța de la B la planul (ADC) .

EDIȚIA a II-a, 18 mai 2002

CLASA a V-a

13. Dacă $2^n + 1 = pq, n \geq 1$, arătați că $p - 1$ și $q - 1$ se divid cu aceeași putere a lui 2.

14. Pentru vopsirea unui cub cu latura de 6 dm se folosesc 180 g vopsea.

a) Dacă înainte de vopsire s-ar înlătura câte un cubuleț cu latura de 1 dm, din fiecare colț al cubului, câtă vopsea ar fi necesară pentru vopsirea corpului rămas.

b) Dacă s-ar tăia cubul vopsit în cubulețe cu latura de 2 dm, câtă vopsea ar mai fi necesară pentru vopsirea suprafețelor noi apărute.

15. Să se găsească toate tripletele de numere prime a, b, c , care satisfac inegalitatea: $abc < ab + bc + ca$, unde a este un număr prim și par.

CLASA a VI-a

16. Fie $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, astfel încât numerele $2x - 3y, 3z, z + 1$, să fie direct proporționale cu numerele $2, 2x + 3y, 19$.

a) Să se determine numerele x, y, z .

b) Să se arate că $x^p + y^{2k} + z^m - 2$ este divizibil cu 4 oricare ar fi $p, k, m \in \mathbb{N}^*$, unde x, y, z au fost determinate la punctul a).

17. a) Calculați suma $1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2001}$.

b) Fie $S = (-1)^1 \cdot (1+2) + (-1)^2 \cdot (1+2+2^2) + \dots + (-1)^{2002} \cdot (1+2+2^2 + \dots + 2^{2002})$.

Să se rezolve în \mathbb{Z} ecuația: $(2^2 - 1) \cdot S = x^2 - 4$.

18. Fie triunghiul ABC ascuțitunghic cu $[AB] \equiv [AC] \neq [BC]$. Pe laturile AB și AC se consideră punctele M și, respectiv, N astfel încât $[BM] \equiv [CN]$. Picioarele perpendicularelor din punctul A pe dreptele CM și BN se notează cu D și, respectiv, E . Arătați că:

a) $AI \perp DE$, unde $BE \cap CD = \{I\}$;

b) Triunghiul DEJ este isoscel, unde $\{J\} = BD \cap CE$;

c) Punctele A, I, J sunt coliniare.

d) $DE \parallel BC$.

CLASA a VII-a

19. Să se rezolve ecuația: $2x^2 - (2y + 1)x + y = 2003$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

20. Să se arate că triunghiul, având ca laturi diagonala, înălțimea și linia mijlocie a unui trapez isoscel, este dreptunghic.

21. În triunghiul isoscel ABC , cu $[AB] \equiv [AC]$, considerăm

$D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel încât $[AE] \equiv [BD]$ și $AE < \frac{AC}{2}$.

Fie F mijlocul segmentului DE . Notăm $DE \cap BC = \{H\}$ și $AF \cap BC = \{G\}$. Arătați că:

a) $[AF] \equiv [FG]$; b) $HB \cdot GC = HG \cdot BG$. (Sorin Peligrad, Pitești)

CLASA a VIII-a

22. Se dă fracția $\frac{7n^3 - 8n^2 - 3n + 4}{7n^3 + 6n^2 - 5n - 4}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că dacă $n \geq 2$ atunci fracția se simplifică printr-un număr natural mai mare sau egal cu 22.

b) Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale n pentru care fracția se simplifică prin 2002.

23. a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\frac{x^3}{x^2 + x + 1} \leq x + a$, pentru orice număr $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$1 + \frac{8}{3} + \frac{27}{7} + \dots + \frac{n^3}{n^2 - n + 1} > \frac{n(3n+1)}{6}.$$

Ediția a III-a, 17 mai 2003

CLASA a VI-a

25. Se consideră numerele:

$$A = \frac{1}{a+b_1} + \frac{2}{a+2b_2} + \frac{3}{a+3b_3} + \dots + \frac{n}{a+nb_n} \quad \text{și}$$

$$B = \frac{b_1}{a+b_1} + \frac{4b_2}{a+2b_2} + \frac{9b_3}{a+3b_3} + \dots + \frac{n^2b_n}{a+nb_n}, \quad \text{unde } a, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$$

sunt numere raționale pozitive $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $\frac{A}{B} = \frac{n}{a}$, iar n este număr par, demonstrați că $B \in \mathbb{N}$. (Ioan Țicalo, Botoșani)

26. Găsiți cel mai mic număr natural nenul n care satisface condiția: dacă n se divide cu $p - 1$ și p este număr natural prim, atunci n se divide cu p , oricare ar fi p .

27. Fie triunghiul ABC și $EF \parallel BC$, $E \in (AB)$, $F \in (AC)$. Să se demonstreze că $AB = BC$, dacă și numai dacă $BE + EF = BC$.

(Ștefan Smarandache, București)

CLASA a VII-a

28. a) Determinați perechile de numere întregi (x, y) astfel încât $2 \cdot x^2 + 3 \cdot y^4 = 2003$;

b) Arătați că există trei numere naturale pătrate perfecte a căror sumă este 2003;

c) Determinați numărul real x astfel încât:

$$16\sqrt{x+64} + 75\sqrt{625-x} + \frac{x}{2} = 2003. \quad (\text{Constantin Guriță, Botoșani})$$

29. Pe laturile unui triunghi echilateral ABC , $AB = 1$ cm, se deplasează două puncte M și N astfel încât drumul între M și N , măsurat pe triunghi, să aibă lungimea constantă 0,5 cm. Să se arate că mijlocul segmentului $[MN]$ se găsește întotdeauna pe laturile unui hexagon și să se calculeze perimetrul acestuia.

(Dorin Popovici, București)

30. Se dă triunghiul echilateral ABC de latură a .

a) Dacă $M \in (BC)$, $BM = MC$ și $N \in (AC)$, calculați minimul perimetrului triunghiului BMN .

b) Dacă $M \in (BC)$, $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{3}$, $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$, calculați minimul perimetrului triunghiului MPQ .

(Constantin Guriță, Botoșani)

CLASA a VIII-a

31. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$. Se cere:

a) Să se determine o condiție necesară și suficientă astfel încât intersecția graficului funcției f cu axa OX este punctul P de abscisă x_p , $k < x_p < k + 1$, $k \in \mathbf{Z}$ (trecând de la puncte situate sub axa OX la puncte situate deasupra axei OX).

b) Să se determine $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, astfel încât $G_f \perp G_g$, $G_f \cap G_g = \{A\}$, unde $A(1, 0)$ și să se traseze cele două grafice în același sistem de axe, XOY .

c) Știind că $OM \perp G_f$ și $OQ \perp G_g$, aflați A_{AMQ} .

(Mihai Țarcă, Vatra Dornei)

32. a) Calculați $\frac{1}{\underbrace{1,00\dots01}_{89 \text{ cifre}}}$ cu 180 de zecimale exacte.

b) Calculați partea întregă și primele 2003 zecimale ale numărului $A = \sqrt{\underbrace{11\dots1}_{4006 \text{ cifre}}}$.

(Ciprian Apetrei, Botoșani)

33. Punctul M este situat în interiorul bazei $ABCD$ a paralelipipedului dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$, Știind că $MA = a$, aria bazei $ABCD$ este $4a^2$, $m(\sphericalangle BMC') = m(\sphericalangle A'MD) = 90^\circ$, iar $A'B \perp C'M$, să se afle aria totală a paralelipipedului.

(Ștefan Smarandache, București)

EDIȚIA a IV-a, 15 mai 2004

Clasa a V-a

34. 1. Se dau cinci numere naturale cu proprietatea că suma oricăror două dintre ele se divide cu 5. Arătați că fiecare dintre cele cinci numere se divide cu 5.

2. Determinați cel mai mare număr de elemente din mulțimea $A = \{1; 2; 3; \dots; 100\}$ care au proprietatea că suma oricăror două dintre ele se divide cu 6. ***

35. 1. Câte numere naturale de forma \overline{abcd} ($a \neq 0$), au proprietatea că suma cifrelor oricărui număr este 27, și una dintre cifre este 2?

2. Arătați că, dacă suma cifrelor numărului \overline{abcd} este 27, atunci numărul $N = \overline{abcd} + \overline{dcba}$ se divide cu 27. ***

36. a) Din numărul 1 se scad, pe rând, toate numerele de forma $\overline{0,abc}$ ($a + b + c \neq 0$), apoi se adună rezultatele obținute. Care este suma finală?

b) Arătați că, printre oricare 500 de numere de forma $\overline{0,abc}$ ($a + b + c \neq 0$), există două a căror sumă este egală cu 1.

(Mircea Fianu, București)

Clasa a VI-a

37. Perechea $(m; n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se numește soluție a ecuației $ax + by = c$, ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) dacă $a \cdot m + b \cdot n = c$.

a) Pentru ecuația $29x - 23y = 1$, determinați soluția de forma $(4; n)$;

b) Determinați o soluție a ecuației $29x - 23y = -47$;

c) Arătați că ecuația $29x - 23y = -47$ are o singură soluție, $(m; n)$, cu proprietatea că $|m| \leq 10$ și $|n| \leq 10$. (Mircea Fianu, București)

38. În urna A se află n bile albe numerotate de la 1 la n , iar în urna B se află n bile negre numerotate de la 1 la n . Din urna B se transferă o bilă în urna A. Astfel, suma numerelor înscrise pe bilele din urna A devine 2004.

a) Arătați că $n > 60$;

b) Determinați n ;

c) Care este cel mai mare număr de bile albe care trebuie transferate din urna A în urna B pentru ca suma numerelor înscrise pe bilele din urna B să fie 2004? (Mircea Fianu, București)

39. Se dă triunghiul isoscel ABC ($m(\sphericalangle BAC) = 100^\circ$). Bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$ intersectează dreapta AB în punctul D . Perpendiculara din punctul A pe dreapta CD intersectează dreapta BC în punctul E , iar $F \in (BC)$ astfel încât $CF = CD$. Arătați că:

a) Triunghiul DEA este isoscel;

b) Triunghiul DEF este isoscel;

c) $BC = CD + DA$.

Clasa a VII-a

40. a) Arătați că, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, numărul $a = x^2 + x + 1$ este pătratul unui număr real. b) Arătați că, dacă x și y sunt numere reale astfel încât $x < y$, atunci $x^3 < y^3$. c) Determinați cel mai mare număr natural n și mulțimea $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\} \subset \mathbb{R}$ știind că $A = \{a_1^3; a_2^3; \dots; a_n^3\}$. (Mircea Fianu, București)

41. 1. Un dreptunghi are dimensiunile $a = m \cdot n$ și $b = m + n$, unde m și n sunt numere naturale nenule. În interiorul dreptunghiului fixăm la întâmplare N puncte ($N \in \mathbb{N}^*$). Arătați că:

a) Dacă $N = m \cdot n(m + n) + 1$, atunci cel puțin două dintre cele N puncte se află în interiorul unui cerc cu raza egală cu 1, 42;

b) Dacă $N = m + n + 1$, atunci cel puțin două dintre cele N puncte se află la o distanță mai mică sau egală cu $\sqrt{m^2 + n^2}$, unul față de celălalt.

2. Rezolvați în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ecuația: $a - b = \sqrt{b^2 - 2a}$.

(Mircea Fianu, Cristian Mangra, București)

EDIȚIA a XVI-a, 14 mai 2016

Clasa a III-a

359. a) O ladă cu mere cântărește 20 de kilograme. După ce se scoate a treia parte din cantitatea de mere, lada cântărește 14 kilograme. Câte kilograme de mere au fost în ladă și cât cântărește lada goală? Justificați! (G.M. 12/2015)

b) Smărăndița împachetează 32 de mingi de tenis în pungi de câte 3 mingi sau 4 mingi în fiecare pungă. De câte pungi are nevoie Smărăndița? Află toate posibilitățile. Justificați! (Ioan Ciobanașu)

360. a) Aflați toate numerele naturale mai mari decât 5010 și mai mici decât 6400 care sunt egale cu răsturnatele lor (exemple: răsturnatul numărului 5612 este 2165, iar a numărului 4002 este 2004).

b) Ce număr natural de trei cifre are suma cifrelor 26 și succesorul său are suma cifrelor 9? Justificați! (Cătălin Budeanu)

361. Nasul lui Pinocchio măsoară 12 cm. După ce spune o minciună el rostește întotdeauna un adevăr, iar după un adevăr el debitează o minciună. La fiecare minciună pe care o spune, nasul său crește cu 8 cm, iar la fiecare adevăr scade cu 6 cm. Dacă Pinocchio a spus cel puțin o minciună, aflați după câte minciuni și câte adevăruri rostite nasul lui ajunge la lungimea:

a) inițială; **b)** de 16 cm. Justificați! (Artur Bălăuică)

362. În parcul Mihai Eminescu din Botoșani o cioară zboară pe prima creangă și croncăne o dată, apoi pe a doua creangă și croncăne de 2 ori, apoi pe a treia creangă și croncăne de 3 ori și așa mai departe. Pe a câta creangă se află cioara când croncăne a 150-a oară? Justificați răspunsul! (Cătălin Budeanu)

Clasa a IV-a

363. a) Un ciclist a parcurs un sfert din traseul pe care îl avea de parcurs. Dacă ar fi mers încă 16 km ar mai fi avut de parcurs un sfert din traseu. Ce lungime are traseul?

b) Câțul împărțirii unui număr natural nenul (diferit de zero) la 7 este jumătate din rest. Să se afle toate numerele cu această proprietate.

EDIȚIA a XVIII-a, 11 - 13 mai 2018
Clasa a III-a

431. Dacă într-o sală de clasă se așază câte un elev în fiecare bancă, rămân 9 elevi fără loc în bancă. Dacă se așază câte doi în bancă, rămân 6 bănci goale. Câte bănci și câți elevi sunt în clasă?

(Gazeta Matematică)

432. Un număr natural se împarte la 4 și dă restul 3. Câtul împărțirii se împarte din nou la 4 și dă restul 3. Noul cât se împarte din nou la 4 și dă câtul 3 și restul 2. Care a fost numărul inițial?

(Mariana Ciobănașu)

433. O vulpe a zărit un iepuraș la 86 metri în fața sa. Cât timp vulpea face 3 salturi de câte 2 metri fiecare, iepurașul face 4 salturi de câte un metru fiecare.

- a) Câți metri va parcurge vulpea până va prinde iepurașul? Justificați.
b) Câți metri va parcurge iepurașul până este înhățat de vulpe?



434. Problema suplimentară. Produsul vârstelor a patru copii din familia Popescu exprimate prin numere naturale este egal cu 360, iar suma vârstelor acestora nu depășește 46 de ani. Aflați câți ani are fiecare copil dacă doi dintre ei sunt gemeni, cel mare este elev premiant, iar cel mic are părul roșcat.

(Artur Bălăucă)

Clasa a IV-a

435. Reconstituiți înmulțirea $\overline{abc} \times 3 = \overline{bcc}$.

(Gazeta Matematică)

436. În fiecare celulă se scriu în ordine literele care alcătuiesc cuvântul „POMPEIU“. Se îngroașă prima literă, se sar trei, apoi se îngroașă următoarea, se sar din nou trei, se îngroașă următoarea, și așa, mai departe.

P	O	M	P	E	I	U	P	O	M	P	E	I	U	P	O	M
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Clasa a X-a

459. Găsiți numerele naturale n și k pentru care avem:

$$1 + \log_2(n+1) = n + \cos \frac{k\pi}{3}.$$

(Supliment, G.M. 12/2017, Lucian Dragomir)

460. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm funcțiile $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $f_1(x) = 2^x - 1$ iar $f_n = \underbrace{f_1 \circ f_1 \circ \dots \circ f_1}_{n \text{ de } f_1}$.

Rezolvați ecuațiile:

a) $f_1(x) = \log_2(1+x)$.

b) $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_{2018}(x) = 2018 \cdot \log_2(1+x)$.

(Adrian Boțan)

461. Fie a un număr real, $a \geq 1$. Dacă numărul ${}^n\sqrt{[a^n]}$ este natural pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, arătați că a este număr natural.

(Mihai Piticari)

462. Problema suplimentară. În plan considerăm un poligon convex $[A_1A_2 \dots A_n]$ cu $n \geq 3$, având vârfurile A_1 și A_2 diferite de originea O . Afizele a_1, a_2, \dots, a_n ale vârfurilor poligonului verifică:

$|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2 = 1$ și $|a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n| \leq 1$, pentru orice alegere a semnelor \pm .

Demonstrați că:

a) $|a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n| = 1$, pentru orice alegere a semnelor \pm .

b) Poligonul este un triunghi dreptunghic.

(xxx)

Clasa a XI-a

463. Fie numerele $a_1, a_2, \dots, a_{2018} \in (0; \infty)$ și $f: [0; \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ cu:

$$f(x) = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^x + \dots + \left(\frac{a_{2017}}{a_{2018}}\right)^x + \left(\frac{a_{2018}}{a_1}\right)^x, \forall x \geq 0.$$

Știind că $f(\pi) \leq f(e)$, să se arate că $a_1 = a_2 = \dots = a_{2018}$.

(Adrian Boțan)